

**Monica Hettrich**

## **Entdecken, Erleben, Beschreiben – der dialogische Mathematikunterricht**



Die **Fortbildungsseminare** der Schulstiftung Freiburg arbeiten bevorzugt pädagogische und didaktische Themen auf, die – über eine rein fachliche Qualifikation der Lehrkräfte hinausgehend – das besondere **Schul- und Unterrichtsklima** und den speziellen **Erziehungs- und Bildungsauftrag** der Katholischen Freien Schulen reflektieren und fördern.

Um dem einzelnen Mathematikschüler als Menschen gerecht zu werden, sind **ganzheitliche Methoden** angezeigt. Mathematikunterricht sollte – gerade in Unterstufenklassen – problem- und schülerorientiert sein. Das selbstständige, angeleitete Herantasten an das mathematische Problem, das **Sprechen und kreative Schreiben über das Erleben der Mathematik** und über individuelle Lernfortschritte sowie das behutsame Hinführen von einer individuellen Sprache zur regulären Fachsprache begünstigen ein **vertieftes und dauerhaftes Verständnis** für mathematische Fragestellungen und Lösungswege. Methoden wie die **Tagebuchmethode** im dialogischen Unterricht führen vom klassischen „Vormachen – Nachmachen“ und einfachen „Frage-Antwort-Verfahren“ eines eher autokratischen Führungsstils zu einem demokratischen und **partnerschaftlichen Miteinander** von Mathematikschüler/in und -lehrer/in.

Das **Fortbildungsseminar „Mathematik entdecken, erleben und beschreiben – Dialogisches Lehren und Lernen“** am 13. und 14. Juli 2006 in Sasbach ist dem Dialogischen Mathematikunterricht gewidmet. Wir konnten **Monica Hettrich** (Stuttgart) und **Katja Klee** (Künzelsau) von der Arbeitsgruppe „Dialogischer Mathematikunterricht“ als Referentinnen gewinnen und laden alle Mathematikkolleginnen und -kollegen unserer Schulen zu diesem Fortbildungsseminar herzlich ein. Informationen im Internet finden Sie unter:  
<http://www.dialogischer-mathematikunterricht.de>

Übrigens: Im Internet wird auch auf folgendes interessante Forschungsergebnis verwiesen: **Gute Geschichtenerzähler sind auch gut in Mathe:** „Erzählerisches Talent bei Kindern sollte gefördert werden: Gute Geschichtenerzähler unter Kindern im Vorschulalter sind später besonders gut in Mathematik. Das zeigt eine Studie kanadischer Forscher (Quelle: <http://www.wissenschaft.de> – 30.07.2004)



Schulstiftung Freiburg

Seit einigen Jahren beschäftigt sich eine Arbeitsgruppe von Lehrkräften am allgemein bildenden Gymnasium mit der Tagebuchmethode nach Gallin und Ruf im Mathematikunterricht. Kinder lernen damit, einen eigenen Standpunkt zu mathematischen Problemen zu entwickeln und ihn anderen darzustellen. Ängste vor der Mathematik werden abgebaut, Schülerinnen und Schüler kommen in vertiefte Gespräche über mathematische Themen. Die Leiterin des Arbeitskreises, Monica Hettrich, beschreibt in diesem Artikel, welche Erfahrungen mit dem dialogischen Unterrichtsprinzip verbunden sind.

## Die Idee des dialogischen Lehren und Lernens

Immer auf der Suche nach der Antwort auf die Frage „Wie unterrichtet man Mathematik?“ gelangten die Mathematiklehrerinnen und -lehrer, die sich in der „Arbeitsgruppe dialogischer Mathematikunterricht“ gefunden haben, auf unterschiedlichen Wegen zum dialogischen Unterricht. Wenn Sie dieser Frage mit Aussagen wie den folgenden begegnen möchten, dann kann Ihnen der vorliegende Artikel einen kleinen Einblick in das dialogische Unterrichtsprinzip geben:

- „Der Mathematikunterricht ist genau dann gut, wenn Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, sich nicht nur intellektuell, sondern auch emotional auf eine Sache einzulassen.“
- „Der Mathematikunterricht ist genau dann gut, wenn darin von und mit Kindern sachkundig über Mathematik gesprochen wird und man sich von der individuell getönten Alltagssprache sachte auf die reguläre Fachsprache zubewegt.“
- „Der Mathematikunterricht sollte sowohl schüler- als auch problemorientiert sein.“
- „Mathematik muss nicht das Lieblingsfach eines Jeden sein, aber in Zukunft sollte niemand mehr mit seiner Unkenntnis auf und seiner Angst vor diesem Gebiet gesellschaftliche Anerkennung gewinnen können – dafür kann der Unterricht in der Schule sorgen.“

Lesen Sie also etwas über die Grundlagen des „Kreislaufs des Lernens“, das „Reisetagebuch“, die Wegbewertung mit Häkchen und ein Beispiel aus unserem Unterricht.

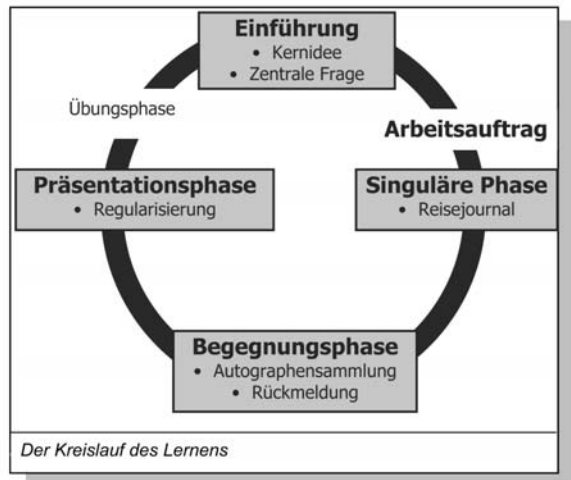
## Der Kreislauf des Lernens

Die Unterrichtseinheit wird beim dialogischen Lehren und Lernen im Wesentlichen in vier Stationen eines Kreislaufes eingeteilt: Einführung mit einer Kernidee, Arbeit mit Reisejournal entlang eines Arbeitsauftrages, Rückmeldung in der Begegnungsphase und die Regularisierung in der Präsentationsphase, die sich folgendermaßen beschreiben lassen:

Der erste Abschnitt enthält eine Einführung in das neue Thema von Seiten des Lehrers, wobei die Kernidee entwickelt und die zentrale Frage vorgestellt wird. Diese Einführung hat vor allem die Aufgabe, die Schüler für das neue Thema zu motivieren und soll an die singuläre Erfahrungswelt der Schüler anknüpfen. Sie kann in Erzählform dargeboten werden, sollte einen vagen Umriss des Stoffgebiets geben und die Schüler zum Forschen ermutigen. Dies verlangt von der Lehrperson ein hohes Maß an Kreativität und Fantasie und erweist sich deshalb häufig als besonders schwierig.

Der Einführungsphase folgt dann die singuläre Phase, in deren Zentrum das von Gallin und Ruf bezeichnete Reisejournal (auch Lernjournal, mathematisches Tagebuch genannt) steht. In diesem unkonventionellen Schülerheft bearbeiten die Schüler selbständig die mathematische Fragestellung und notieren sich nicht nur die einzelnen Rechenschritte, sondern – und das ist das Besondere des dialogischen Unterrichts – sie kommentieren auch jeden ihrer Gedanken in Form kurzer Texte. Kommentieren bedeutet dabei eine Beschreibung und auch eine Bewertung der Vorgehensweise.

„Die Sprache hat in all diesen Fällen die Aufgabe, den Prozess des Verstehens zu aktivieren und die gewonnenen Einsichten zu festigen. Auf diese Weise nimmt mit der Sachkompetenz auch die Sprachkompetenz zu.“ (Gallin, Ruf und Sitta 1995)



Die Rolle des Lehrers beschränkt sich in dieser Phase auf die individuelle Beratung und vor allem auf die Ermutigung und Motivation des Einzelnen, wobei man vorsichtig vermeiden muss, zuviel zu verraten oder die Schüler zu sehr auf den konventionellen Weg zu führen. Wie in jeder Einzel- oder Stillarbeitsphase kann sich der Lehrer individuell um einzelne Schüler kümmern. Die Schülernotizen erleichtern dabei den Dialog zwischen Lehrer und Schüler.

Während der singulären Phase obliegt dem Lehrer die Aufgabe der aktiven Präsenz, die allerdings das auch aus dem traditionellen Unterricht her bekannte Problem aufwirft, in eingeschränkter Zeit jedem einzelnen Schüler gerecht zu werden. Der Lernende soll zwar selbständig an das Problem herangehen, braucht aber auch die fachliche Unterstützung und Beratung der Lehrperson. Der Lehrer sollte in mündlicher oder schriftlicher Form auf Schülerfragen eingehen, ohne dabei zu viel zu verraten. Ihr steht es auch frei, Lösungswege oder -strategien zu skizzieren oder Hilfsmittel in Form von Graphiken oder Modellen anzubieten, nur sollte den Schülern erst die Möglichkeit gegeben werden, sich ausgiebig mit dem Problem zu beschäftigen. Fehler und Irrwege sollten in der singulären Auseinandersetzung mit dem Auftrag nicht sofort korrigiert werden, da die Schüler diese ja, wenn möglich, selbst entdecken sollen, um sie so in Zukunft zu vermeiden. Wichtig ist vor allem eine ständige Ermutigung der Schüler.

Die Bewertung der Aufschriebe erfolgt mit Hilfe der „Häkchen“, die diese Art der Bewertung deutlich von einer Produktbewertung, die üblicherweise durch normale Noten erfolgt, trennen. Die Häkchen sagen den Schülerinnen und Schülern also „Achtung: Hier wirst du nicht nach den Kriterien, die in der Mathe-Arbeit angelegt werden, beurteilt – es geht hier vielmehr um deine persönliche Bereitschaft, dich kreativ mit der Fragestellung auseinanderzusetzen.“

Nach Abschluss der Arbeit mit dem Tagebuch sollten die Schülerinnen und Schüler eine Rückmeldung zu ihren geäußerten Gedanken erhalten. Wir nennen diese Unterrichtsphase die Begegnungsphase,

### Die Häkchen

Die Arbeit im Reisetagebuch wird mit Häken bewertet. Jede Häkchenzahl hat eine Bedeutung:



✓✓✓✓ **Du bist ein großer Wurf gelungen!**  
 Vier 4 Häkchen möchte man sich schon überziehen. Das kann allerdings auf ganz unterschiedliche Weise gelingen.

- eine außergewöhnliche Idee
- ein toller Fehler
- ein neues Problem



✓✓✓ **Du hast eine tolle Idee gehabt!**  
 Oder einen vielversprechenden Ansatz formuliert, einen nützigen Versuch unternommen. Auf jeden Fall hast du den Arbeitsauftrag ausführlich bearbeitet.



✓✓ **Du hast das Prinzip erkannt!**  
 Du hast die zentrale Frage verstanden und hast dich sinnvoll mit dem Thema auseinandergesetzt. Es ist selbstständige Arbeit erkennbar. Wenn du nun in der Besprechung gut aufpasst, kannst du alles verstehen.



✓ **Du hast die Arbeit erledigt!**  
 Das habe ich mindestens erwartet. Das, was du aufnotiert hast, reicht vermutlich in der nächsten Klassenarbeit für eine 4 aus. Wenn du mehr willst, musst du vor allem in der Besprechung zum Auftragsverständnis nachdenken und mit Schreiben damit den Arbeitsauftrag noch einmal überarbeiten lassen.



✗ **Das reicht noch nicht!**  
 Du mußt dich noch einmal mit der Sache beschäftigen – das, was du aufgeschrieben hast, reicht nicht aus, um im Unterricht mitzukommen und mit Schreiben damit den Arbeitsauftrag gerade noch eine 4 zu bekommen.

Wer verspätet abgibt, kann höchstens einen Haken erhalten.



Die Häkchenbewertung von Reisetagebüchern – ein Erklärungstext für Schüler

da hier verschiedene singuläre Standpunkte aufeinandertreffen können. Die Lehrkraft liest Tagebuchauszüge von den Schülerinnen und Schülern durch und kopiert einzelne Texte für die gesamte Klasse. So entsteht die Autografensammlung. Die Klasse bekommt daraufhin den Auftrag, diese kopierten Texte zu lesen und aus ihrem Blickwinkel zu kommentieren. Im Anschluss wird über die unterschiedlichen Standpunkte diskutiert und die für die Lösung des im Auftrag gestellten Problems geeignete Ansätze werden ausgearbeitet und z. B. an der Tafel festgehalten.

Den nächsten Abschnitt bildet eine sogenannte Präsentationsphase, in welcher der erarbeitete Stoff im besten Fall von Schülern, anderenfalls von der Lehrperson zusammengefasst vorgetragen wird. Nach der intensiven Erarbeitungsphase kann diese Phase recht kurz gehalten werden, da kein großer Motivationsaufwand betrieben werden muss. Die meisten Schüler wollen zu diesem Zeitpunkt einfach die „richtige“ Lösung wissen bzw. ihre Lösung verifiziert bekommen.

Präsentationstechniken können natürlich nicht vorausgesetzt werden, sondern müssen mit der Klasse eingeübt werden, um diese Präsentation auch bewerten zu können. Besonders an dieser Stelle ist eine Zusammenarbeit mit dem Fach Deutsch erwünscht. Die Beurteilungskriterien sollten dabei für die Schüler transparent gemacht bzw. mit ihnen aufgestellt werden. Die Schülerpräsentation sollte ohne Unterbrechung ablaufen. Fehler und Probleme können und müssen dann im Anschluss diskutiert werden.

## Das Reisejournal

Das Reisejournal dokumentiert die Spuren des individuellen Forschens. Der Lernende schreibt seine Gedanken auf und kommentiert die jeweiligen Schritte – Rechenweg, Lösungsversuch, Beweisidee oder Fehler –, die er unternimmt. Die schriftliche Sprache spielt dabei eine große Rolle: „Beim Schreiben verlangsamen und klären sich die Gefühle und Gedanken, nehmen Gestalt an und fordern zur Stellungnahme heraus. Wer schreibt übernimmt in besonderer Weise Verantwortung für seine Position, öffnet sich der Kritik.“ (Gallin und Ruf, 1998)

Ein kreatives Herangehen an die mathematischen Probleme wird von den Schülern gefordert, indem sie verschiedene Wege erproben sollen. Ein Unterschied zu einer herkömmlichen Aufgabenstellung ist die „andere Herangehensweise der Schüler an solche Arbeitsaufträge: Hier sind unkonventionelles Ausprobieren und „Fehler machen“ nicht verboten, sondern absolut erwünscht.

<u>Zahlen sind meine Freunde</u>	
1: Für mich sind drei Zahlen wichtig:	
Welche?	Warum?
die 17 und die 4. Auch die 93.	Weil ich am 17.4. Geburtstag hab. Im Jahr 93 bin ich geboren.
Die 24.	Weil die die Uhr 24 Zahlen hat. (24 Stunden)
Die 1.	Weil die <u>Note 1</u> , gut ist. Und wer mag keine guten Noten? Die 1 ist auch hübsch.
Die 109	Weil mein 10. Geburtstag sehr, sehr schön war!
59	Das ist meine Klausurnummer.
Unendlich...	Ich mag das Wort. Wenn ich es sage kribbelt mein Bauch richtig!

Schulstiftung Freiburg

Auszug aus  
dem Reise-  
journal der  
5.-Klässlerin  
Diana

Die Schülertexte helfen dem Lehrer, die individuellen Denkweisen des Schülers aufzuspüren und so eine gezielte Beratung und später auch eine Beurteilung anzustreben. Hier wird auch transparent, mit welcher Intensität sich ein Schüler mit einer Sache auseinandergesetzt hat. Durch die Möglichkeit, Vorstöße in Richtungen, die ursprünglich nicht beabsichtigt waren, zu honorieren, werden Schüler zum selbständigen Forschen ermutigt und trauen sich so auch einmal in der Mathematik über den Tellerrand hinauszublicken.

Doch was schreiben Kinder eigentlich, denen man solche Aufträge zutraut? Hier sieht man einen kurzen Ausschnitt aus dem mathematischen Tagebuch der 5.-Klässlerin Diana. Diana schreibt darin ihre Gedanken zur Frage „Welche Zahlen sind für dich wichtig?“ nieder. Neben den Zahlen, die ihren Geburtstag, die Schulnoten und ihre Hausnummer betreffen, eröffnet sie, dass die Zahl Unendlich ihr ein „Kribbeln im Bauch“ verursacht, weil sie das Wort so sehr mag. Dass Diana diesen Auftrag mit sehr viel Spaß bearbeitet hat, sieht man in jeder Zeile! Der Inhalt und die Struktur dieses Aufschriebes wurden von ihr völlig eigenständig erdacht – es gab zu dieser Frage keinen Tafelanschrieb im Unterricht und keine formalen Vorgaben für das Tagebuch!

Solche emotionalen Aspekte werden im konventionellen Mathematikunterricht sehr selten geäußert, da der Raum dafür nicht vorhanden ist. Die Schülerinnen und Schüler müssen fürchten, dass alle ihre Aussagen im Unterrichtsgespräch Grundlage für eine mündliche Note geben – warum sollten sie also derartige Gefühle preisgeben?

Auch mathematisch sehr anspruchsvolle Überlegungen werden auf diese Art von den Schülerinnen und Schülern preisgegeben, die Mathematiklehrkräfte ansonsten selten in diesem Umfang präsentiert bekommen.

So schreibt der aus Russland stammende Edward – ebenfalls in Klasse 5 – in seinem Reisejournal einiges über die Stellenwerte im Binärsystem. Die Fragestellung ist: *Wie addiert man wohl zwei Zahlen in einem anderen Stellenwertsystem, z. B. im Binär- oder im Fünfersystem?*

Zunächst hat Edward keine zündende Idee, daher gibt ihm die Lehrkraft zwei konkrete Beispiele (grau markiert), mit denen er sich beschäftigen kann – offensichtlich hatte ihn die Aufgabe, bei der er sich selbst geeignete Beispiele suchen musste, überfordert.

Er löst die Beispiele, findet aber keine Regelmäßigkeit, weil er die Addition immer über die Umrechnung ins Dezimalsystem löst.

Erst der Hinweis auf die formale Schreibweise der schriftlichen Addition führt dann bei ihm sofort zu einem „Aha-Erlebnis“ ...

Und weil dieses Erlebnis zu den schönsten Momenten im Leben gehört, hört Edward natürlich nicht auf, wenn er das Ziel erreicht hat, sondern wendet sich der Addition im Hexadezimalsystem zu!

An diesem Beispiel sieht man zudem, dass die sprachliche Ausdrucksfähigkeit des russland-deutschen Kindes nicht besonders gut ausgeprägt ist. Das ist aber in diesem Moment unerheblich, weil ganz deutlich wird, welche Kernidee Edward hier beschreibt. Würde dieser Aufschrieb aus der Defizitperspektive beurteilt, so müsste man auf den schlechten Schreibstil eingehen und würde den Jungen mit Sicherheit entmutigen. Aus der Blickrichtung der Wegbewertung wird aber das Positive, nämlich die gedankliche Leistung des Kindes gewürdigt.

Für den Einsatz des mathematischen Tagebuches sprechen daher einige wichtige Gründe:

- Das mathematische Tagebuch hilft den Kindern dabei, ihre eigenen Gedanken besser wahrzunehmen und sie zu strukturieren.
- Emotionale Lernbarrieren werden durch die Möglichkeit der persönlichen Stellungnahme zur Sache spürbar abgebaut. Damit wird auch eine grundsätzlich ablehnende Haltung vieler Kinder gegenüber der Mathematik schon im Ansatz



Rampe:

Tipp: Probiere's mal mit

a)  $(1100)_2 + (1000)_2$   
 b)  $(111)_2 + (10)_2$

a)  $(12)_{10} + (8)_{10} = (20)_{10} = (10100)_2$   
 b)  $(7)_{10} + (2)_{10} = (9)_{10} = (1001)_2$

Schreibe die Rechnung doch mal so  
 auf wie im Dezimalsystem:

$\begin{array}{r} (1100)_2 \\ + (1000)_2 \\ \hline (10100)_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} (111)_2 \\ + (10)_2 \\ \hline (1001)_2 \end{array}$
---	---

Es geht so wenn ich z.B.  
 $(1100)_2 + (1000)_2$  rechnet geht das so

$\begin{array}{r} (1100)_2 \\ + (1000)_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 0+0=0 \\ 0+0=0 \\ 0+1=1 \end{array}$	$1+1=10, \text{ weil } \begin{array}{r} 1+1 \\ \hline 2 \end{array}$
---	--	--

und 2 ist im 2er System 10 und  
 wenn  $1+1+1$  ist 3 ~~so~~ und ist 11  
 weil 3 ist 11 im 2er System!

z.B. 
$$\begin{array}{r} (FF)_{16} \\ + (1A)_{16} \\ \hline (103)_{16} \end{array}$$
 Hier ist das  
 gleich aber  
 mit A,B,C,D,E,F  
 und mit 16er  
 System.

Auszug aus Edwards Reisejournal zur Addition im Binärsystem

Schulstiftung Freiburg

überwunden, denn jeder darf „ungestraft“ den individuellen Abstand zur Sache dokumentieren. Der selbst gefundene und dargestellte Standpunkt öffnet für den Dialog mit anderen Meinungen.

- Für die Lehrkraft besitzen die Schülertexte einen ganz besonderen Wert: Nirgends sonst ist es ihr möglich, einen so fundierten Blick in die Gedankenwelt der eigenen Schüler zu werfen wie hier!

Nach den Erfahrungen der Arbeitsgruppe zum dialogischen Mathematikunterricht nähern sich die Schülerinnen und Schüler dem vertieften mathematischen Denken so besser an als im klassischen Unterricht. Außerdem lernen sie, Texte zu verstehen, selbst verständliche Texte zu verfassen und über Mathematik zu sprechen.